



سرگرمی‌های عددی؛ ذهن جوانی

عباس قلعه‌پور اقدم

به **B** بگویید، بدون اینکه خارج قسمت تقسیم را به شما بگوید، کاغذ را به نفر **C** بدهد. حال از **C** بخواهید که نتیجه را بر ۱۱ تقسیم کند. این بار هم تأکید کنید که باقی‌مانده‌ای وجود نخواهد داشت. نفر **C** پس از انجام عمل تقسیم این موضوع را درخواهد یافت و شگفت‌زده خواهد شد.

$$۵۶۳۴۲ \div ۱۱ = ۵۱۲۲ \quad \text{ادامه مثال:}$$

در ادامه، بدون اینکه کاغذ یادداشت را ببینید یا در خصوص محاسبه‌های انجام شده اطلاعاتی بگیرید، از نفر **D** بخواهید کاغذ یادداشت را بگیرد و نتیجه تقسیم نفر **C** را، این بار بر ۱۳ تقسیم کند.

$$۵۱۲۲ \div ۱۳ = ۳۹۴ \quad \text{ادامه مثال:}$$

نتیجه نهایی نوشته شده روی کاغذ را که تا شده و دیده نمی‌شود، از **D** بگیرید و بدون باز کردن به نفر **A** بدهید و به او بگویید: «کاغذ را باز کن و عدد اولیه‌ای را که در نظر گرفته بودی، روی آن بین.»

برای اینکه بهتر متوجه شوید، گزارش یک بازی انجام شده را به صورت خلاصه و نموداری در زیر می‌آوریم:

$$۸۳۶ \rightarrow ۸۳۶۸۳۶ \rightarrow ۸۳۶۸۳۶ \div ۷ = ۱۱۹۵۴۸ \rightarrow ۱۱۹۵۴۸ \div ۱۱ = ۱۰۸۶۸ \rightarrow ۱۰۸۶۸ \div ۱۳ = ۸۳۶$$

رازگشایی از بازی

برای اینکه راز معمای این بازی را کشف کنید، در آغاز باید بدانید

در این بخش می‌خواهیم شما عزیزان را با یک بازی معما گونه ریاضی آشنا کنیم که می‌توانید آن را به همراه چهار نفر از دوستانتان اجرا و آن‌ها را هیجان‌زده کنید. البته این یک بازی دو نفره نیز می‌تواند باشد. در آغاز نحوه انجام بازی را برایتان شرح می‌دهیم و در ادامه از معمای آن رازگشایی می‌کنیم. فقط باید قول بدهید که پس از یادگیری بازی، مطالب را تا انتها دنبال کنید تا پس از آموختن راز این بازی آن را به دوستانتان نیز یاد بدهید. چهار دوستی را که شما برای انجام این بازی انتخاب می‌کنید **A**، **B**، **C** و **D** می‌نامیم. بازی به صورت زیر اجرا می‌شود:

از نفر **A** بخواهید یک عدد سه‌رقمی را بدون اینکه به شما بگوید، در نظر بگیرد و سپس ارقام آن را به همان ترتیبی که هستند، تکرار کند تا یک عدد شش‌رقمی ساخته شود و آن را روی یک تکه کاغذ یادداشت کند.

$$۳۹۴ \rightarrow ۳۹۴۳۹۴ \quad \text{مثال:}$$

به **A** بگویید کاغذ یادداشت را به نفر **B** بدهد. حال از نفر **B** بخواهید که عدد شش‌رقمی روی کاغذ را بر ۷ تقسیم کند. به او بگویید که نگران باقی‌مانده نباشد، زیرا باقی‌مانده‌ای وجود نخواهد داشت. نفر **B** با انجام عمل تقسیم (که می‌تواند از ماشین حساب هم استفاده کند) و رسیدن به باقی‌مانده صفر متعجب خواهد شد.

$$۳۹۴۳۹۴ \div ۷ = ۵۶۳۴۲ \quad \text{ادامه مثال:}$$

می‌توان به روش عبارتهای جبری عمل کرد که آن را برایتان می‌آوریم:

فرض کنیم \overline{ab} یک عدد دورقمی باشد. عدد چهاررقمی حاصل از تکرار رقم‌های این عدد به صورت \overline{abab} خواهد بود. گسترده‌های این دو عدد را می‌نویسیم:

$$\overline{ab} = 10a + b \quad (1)$$

$$\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b \quad (2)$$

تساوی (۲) را به صورت زیر ساده می‌کنیم و سپس از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \overline{abab} &= (1000a + 10a) + (100b + b) \\ &= 1010a + 101b = 101(10a + b) \\ &= 101 \times \overline{ab} \end{aligned}$$

پس \overline{abab} ، 101 برابر \overline{ab} است.

حال به مطلب اصلی، یعنی اعداد سه‌رقمی می‌رسیم. عدد سه‌رقمی ۸۱۴ را در نظر می‌گیریم. ارقامش را تکرار می‌کنیم تا عدد شش‌رقمی ۸۱۴۸۱۴ به دست آید و سپس:

$$814814 \div 814 = 1001$$

حال شما چند عدد سه‌رقمی دیگر را نیز آزمایش کنید. حتماً به عدد ۱۰۰۱ خواهید رسید. بله! درست حدس زده‌اید، این ویژگی به تمام ۹۰۰ عدد سه‌رقمی تعلق دارد که آن را به صورت جبری اثبات می‌کنیم:

فرض کنیم \overline{abc} یک عدد سه‌رقمی باشد. عدد شش‌رقمی حاصل از تکرار رقم‌های آن به صورت \overline{abcabc} خواهد بود و داریم:

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= 100a + 10b + c \\ \overline{abcabc} &= 10000a + 1000b \\ &\quad + 1000c + 100a + 10b + c \\ &= 10010a + 1001b + 1001c \\ &= 1001(100a + 10b + c) \\ &= 1001 \times \overline{abc} \end{aligned}$$

شاید پرسید که: این ویژگی عددهای سه‌رقمی چه ربطی به گشودن راز بازی دارد؟ در تساوی زیر دقت کنید، شاید همه چیز را متوجه شوید:

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

درست متوجه شده‌اید.

وقتی رقم‌های یک عدد سه‌رقمی را تکرار می‌کنید، در واقع آن را هزار و یک برابر کرده‌اید و ۱۰۰۱ حاصل ضرب سه عدد ۷، ۱۱ و ۱۳ است. پس به طور طبیعی، وقتی عدد شش‌رقمی حاصل را بر ۷ و سپس نتیجه را بر ۱۱، و بعد نتیجه را بر ۱۳ تقسیم می‌کنید، به همان عدد سه‌رقمی اولیه خواهید رسید.

که تمام ۹۰۰ عدد سه‌رقمی این ویژگی را دارند که اگر ارقامشان را تکرار کنید تا یک عدد شش‌رقمی ساخته شود و سپس عدد شش‌رقمی را بر ۷ و بعد بر ۱۱ و در نهایت نتیجه را بر ۱۳ تقسیم کنید، حاصل همان عدد سه‌رقمی اولیه خواهد بود. ولی چگونه می‌توان این ویژگی را ثابت کرد؟ آیا باید تمام ۹۰۰ عدد سه‌رقمی (البته به استثنای ۳۹۴ و ۸۳۶) را تک‌تک آزمایش کنیم؟ البته این هم راهی است و تنها ایرادش، وقت‌گیر بودن آن است. ولی راه بهتری هم وجود دارد و آن استفاده از عبارتهای جبری است. برای اینکه بتوانید این اثبات را متوجه شوید، کار مشابهی را روی عددهای یک‌رقمی و دورقمی، به عنوان مقدمه انجام می‌دهیم. عدد یک‌رقمی ناصف‌ری را در نظر بگیرید (شما تنها ۹ انتخاب دارید). آن را تکرار کنید تا یک عدد دورقمی ساخته شود. این عدد دورقمی را بر ۱۱ تقسیم کنید. به چه عددی رسیدید؟ بله! درست است، به همان عدد اولیه. به دو مثال زیر توجه کنید:

$$6 \rightarrow 66 \text{ ; } 66 \div 11 = 6$$

$$9 \rightarrow 99 \text{ ; } 99 \div 11 = 9$$

این ویژگی را می‌توان چنین بیان کرد:

عدد دورقمی دارای رقم‌های تکراری، یازده برابر رقم تکرار شونده است.

برای اثبات این ویژگی می‌توانید تمام ۹ عدد یک‌رقمی را تک‌تک آزمایش کنید که کار ساده‌ای است و آن را به شما می‌سپارم. ولی راه دیگر استفاده از عبارتهای جبری به صورت زیر است: اگر عدد یک‌رقمی اولیه را a در نظر بگیریم، عدد دورقمی حاصل از تکرار به صورت \overline{aa} خواهد بود که در ریاضی آن را به شکل \overline{aa} نمایش می‌دهیم. در این عدد ارقام یکان و دهگان هر دو a هستند و گسترده (باز شده) آن به صورت زیر است:

$$\overline{aa} = 10a + a$$

خب معلوم است که: $10a + a = 11a$. پس: $\overline{aa} = 11a$. یعنی \overline{aa} یازده برابر a است.

حال به سراغ اعداد دورقمی می‌رویم. عدد دورقمی ۸۴ را در نظر می‌گیریم و ارقام آن را به همان ترتیبی که هستند، تکرار می‌کنیم تا به عدد چهاررقمی ۸۴۸۴ برسیم. این عدد را بر ۸۴ تقسیم می‌کنیم: $8484 \div 84 = 101$

و دو عدد دیگر را نیز آزمایش می‌کنیم:

$$34 \rightarrow 3434 \text{ ; } 3434 \div 34 = 101 \text{ و}$$

$$70 \rightarrow 7070 \text{ ; } 7070 \div 70 = 101$$

در واقع تمام عددهای دورقمی که تعدادشان برابر ۹۰ است، این ویژگی را دارند. آن را ارائه و اثبات می‌کنیم:

عدد چهاررقمی حاصل از تکرار ارقام هر عدد دورقمی، ۱۰۱ برابر آن است.

برای اثبات، هم می‌توان تک‌تک اعداد دورقمی را آزمایش کرد که تنها به یک ماشین حساب و کمی حوصله و وقت نیاز دارد و هم